**ZADANIA KONKURSOWE**
**Styczeń 2010**

*Podstawową umiejętnością w sztuce argumentacji jest umiejętność odróżniania dowodu od przypuszczenia, poprawnego dowodzenia od ułomnej próby.*
*(G. Polya)*

**Zadanie 1**
Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie :
$$2x^2 - 6xy + 5y^2 = 5.$$
**Zadanie 2**
Znajdź wszystkie funkcje $f : R \setminus \{0\} \to R$ spełniające równość:
$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$
**Zadanie 3**
Czy równanie $xy + yz + zx = 1$ posiada skończenie wiele czy nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.
**Zadanie 4**
Znajdź wszystkie liczby całkowite *n* takie, że $n^2 - 11n + 63$ jest kwadratem pewnej liczby.

*Zasada DIRICHLETA: jeżeli n+1 przedmiotów mamy rozmieścić na n miejscach(np. n+1 królików w n klatkach), to przynajmniej na jednym z tych miejsc znajdą się co najmniej dwa przedmioty.*
**Zadanie 5**
Okrągły stół udekorowano proporczykami *n* różnych krajów w taki sposób, że przy każdym nakryciu umieszczono jeden proporczyk. Przy stole siedzi *n* ambasadorów z tych krajów, przy czym żaden z nich nie siedzi przy proporczyku swego kraju. Wykaż, że można stół obrócić o taki kąt, że po obrocie co najmniej dwóch ambasadorów będzie siedziało przy właściwym proporczyku.
**Zadanie 6**
Na kratkowanym papierze w węzłach kratek znajduje się 5 punktów. Wykaż, że co najmniej jeden z odcinków łączących te punkty przechodzi przez węzeł kratki.

**Zadanie 7**
Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.
**Zadanie 8**
Odcinki *AM, BN* i *CP* są środkowymi w trójkącie *ABC*. Wykaż, że $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$.
**Zadanie 9**
Liczbę 1988 przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych. Podaj wszystkie możliwości.
**Zadanie 10**
Ile jest funkcji liniowych $f(x) = ax + b$ takich, że $f(b) = 2009a$, gdzie $a$ i $b$ są liczbami całkowitymi?

*Matematycy są jak Francuzi; wszystko, co im mówicie, tłumaczą na własny język, a wtedy okazuje się, że mówią o czymś zupełnie innym.*
*(Johann Wolfgang Goethe)*