

**ZADANIA KONKURSOWE**  
**Listopad 2009**



Po co ludzie uczą się matematyki?

Żeby uczyć matematyki innych.

Hugo Steinhaus

**Zadanie 1**

Wyznaczyć wszystkie pary  $(x, y)$  liczb całkowitych, spełniających równanie:  
 $xy + y = 5x + 2008$ .

**Zadanie 2**

Liczby  $a$  i  $b$  są takimi liczbami całkowitymi, że  $a^2 + 119ab + b^2$  dzieli się przez 11. Wykazać, że  $a^3 - b^3$  też dzieli się przez 11.

**Zadanie 3**

Rozwiąż równanie:  $||x-1|-1| = ||x-2|-2|$ .

**Zadanie 4**

Rozwiąż równanie:  $[x] + [1-x] = 1$ , gdzie symbol  $[m]$  oznacz największą liczbę całkowitą nie większą od  $m$ .

**Zadanie 5**

Liczby  $a^5$  i  $a^7$  są całkowite. Wykaż, że liczba  $a$  jest również całkowita.

**Zadanie 6**

Która liczba jest większa:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} \quad \text{czy} \quad 4?$$

**Zadanie 7**

Wykaż, że dla dowolnych różnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  prawdziwe są nierówności:

- $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
- $(a+b)^2 < 2(a^2 + b^2)$
- $(a+b)^3 < 4(a^3 + b^3)$ .

**Zadanie 8**

Która z liczb jest większa:

$$123456789 \cdot 987654321 \quad \text{czy} \quad 555555555^2 ?$$

**Zadanie 9**

Uzasadnij, że:

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

**Zadanie 10**

$$\text{Która z liczb jest większa: } \sqrt{2004} + \sqrt{2006} \quad \text{czy} \quad 2\sqrt{2005} ?$$

**Wszystko należy upraszczać, jak tylko można, ale nie bardziej.**

Albert Einstein