

ZADANIA KONKURSOWE
Grudzień 2009

Zadanie 1

Wykazać, że liczba

$$2009^{2010} - 2 \cdot 2009^{2009} + 2009^{2008}$$

jest podzielna przez 2008.

Zadanie 2

Która z liczb jest większa:

$$2^{\sqrt{3}} \quad \text{czy} \quad 3^{\sqrt{2}}$$

Zadanie 3

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

$$x^4 - x + 1 > 0.$$

Zadanie 4

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że liczba $4pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie liczby całkowite nieujemne n takie, że liczba $2^{4n+2} + 1$ jest pierwsza.

Dla danych liczb nieujemnych a i b :

- *średnią arytmetyczną nazywamy liczbę $\frac{a+b}{2}$*
- *średnią geometryczną nazywamy liczbę \sqrt{ab}*
- *średnią harmoniczną nazywamy liczbę $\frac{2ab}{a+b}$, przy czym $a > 0$ i $b > 0$*
- *średnią kwadratową nazywamy liczbę $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$*

Zadanie 6

Wykaż, że $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Zadanie 7

Wykaż, że $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Zadanie 8

Uzasadnić, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej na dwie figury o równych polach.

Zadanie 9

Która z liczb jest większa 3^{34} czy 2^{51} ?

Zadanie 10

Uzasadnić, że

$$8^{40} > 5^{40} + 6^{40}.$$

Na Uniwersytecie Warszawskim dydaktyk matematyki Stanisław Kartasiński kazał wszystkim zdającym dydaktykę na wstępie egzaminu deklamować formułkę:

Matematyka szkolna to niespójny zlepek przypadkowo wybranych fragmentów różnych teorii matematycznych.